L2 MTH1314 2015-2016

Rattrapage du Devoir Maison n˚1
A rendre pour le 5 Novembre

Exercice 1. *(4 points)*

1. Soient G et H deux ensembles. Soient $*$ une l.c.i. de G et $\cdot$ une l.c.i. de H. On considère $\varphi : (G, *) \to (H, \cdot)$ un morphisme bijectif et on suppose que $(H, \cdot)$ est un groupe commutatif. Montrer alors que $(G, *)$ est un groupe commutatif.
2. En déduire que $\mathbb{R}$ muni de la l.c.i. $*$ définie par $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, est un groupe.

Exercice 2. *(4 points)* On définit $\mathbb{Q}[i] := \{a + ib,\ \text{avec } (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Justifier que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{N} :\ (\mathbb{Q}[i], \times) &\to (\mathbb{Q}_+^*, \times) \\ a + ib &\mapsto a^2 + b^2, \end{aligned}$$

   est un morphisme de groupes et en déduire que

$$H := \{a + ib,\ \text{avec } (a, b) \in \mathbb{Q}^2, a^2 + b^2 = 1\}$$

   est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}[i], \times)$.